EXERCICE N°1 — 7 points — Principale 2015

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$.

b) En déduire que la courbe C_f admet deux asymptotes que l'on précisera.

c) Etudier la position de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.

2°) a) Montrer que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}$.

b) Montrer que (x^2-1) et $\ln x$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1+\infty[$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1+\infty[$.

d) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x)=0$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

3°) a) Montrer que la courbe C_f admet une unique tangente D parallèle à la droite Δ.

Préciser les coordonnées du point B, point de contact de C et D.

b) Donner une équation de D.

4°) Dans la figure ci-contre, on a tracé relativement au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite Δ et la courbe (Γ) d'équation $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

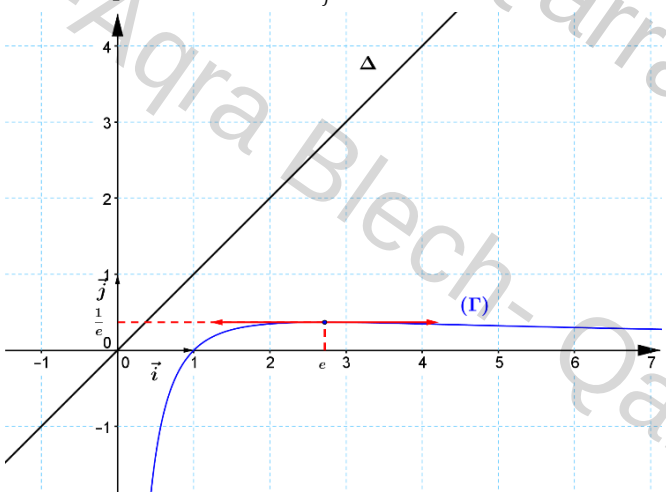
a) Soit le point $A(\dfrac{1}{e},0)$.

Placer le point A et vérifier que A appartient à D.

b) Tracer la droite D et placer le point B.

c) Tracer C_f.

5°) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, la droite Δ et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{e}$ et x=e. Calculer $\mathcal{A}$.



Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn

Tous droits réservés © TakiAcademy.com